

# LES NOMBRES DÉCIMAUX

COMMENT AMÉLIORER LES APPRENTISSAGES ?

- 1. Les résultats des élèves**
- 2. Comprendre l'écriture à virgule**
- 3. Calculer pour renforcer la compréhension des décimaux et renforcer la compréhension des décimaux pour mieux calculer**

# Avant de commencer...

# Qu'est-ce qu'un nombre décimal ?

# Qu'est-ce qu'un nombre décimal ?

## Les ensembles de nombres

	7,52	12	$\frac{28}{4}$	$\frac{49}{14}$	$\frac{1}{3}$	$\pi$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5+4}$
entiers								
décimaux								
rationnels								
irrationnels								
réels								

# Qu'est-ce qu'un nombre décimal ?

Les nombres rationnels au cycle 3

Nombres entiers

$\sqrt{2}$

Nombres décimaux

Nombres rationnels

$\pi$

12

$\frac{28}{4}$

7,52

$\sqrt{5 + 4}$

$\frac{49}{14}$

$\frac{1}{3}$

# QUESTION N°1

Parmi les trois affirmations ci-dessous, laquelle ou lesquelles vous semblent acceptables ?

- Ⓐ Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous forme d'une fraction décimale.
- Ⓑ Un nombre décimal est un nombre avec une virgule.
- Ⓒ Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

- 1. Les résultats des élèves**
- 2. Comprendre l'écriture à virgule**
- 3. Calculer pour renforcer la compréhension des décimaux et renforcer la compréhension des décimaux pour mieux calculer**



$\frac{7}{2}$  peut aussi s'écrire

**A** 2,5

**B** 3,5

**C** 7,2

**D** 7,5

67,9% des jeunes de 17 ans ou plus ont répondu correctement

Entoure la fraction égale à 80,4.

$$\frac{804}{100}$$

$$\frac{80}{4}$$

$$\frac{84}{10}$$

$$\frac{804}{10}$$

$$\frac{804}{1000}$$

48,3% des élèves ont répondu correctement à l'entrée en 6° en septembre 2006

En se pesant sur la balance, le père de Nicolas voit l'affichage suivant :



Cela signifie qu'il pèse :

1	<input type="checkbox"/>	74kg 3g
2	<input type="checkbox"/>	74kg 30g
3	<input type="checkbox"/>	74kg 300g
4	<input type="checkbox"/>	74kg 3 000g

38% de réussite en fin d'école  
54% de réussite en fin de collège

Une bouteille de jus de pomme coûte 1,87 zeds.  
Une bouteille de jus d'orange coûte 3,29 zeds.  
Julien a 4 zeds.

Combien de zeds Julien doit-il avoir **en plus** pour acheter les deux bouteilles ?

- (A) 1,06 zeds
- (B) 1,16 zeds
- (C) 5,06 zeds
- (D) 5,16 zeds

PAYS	Taux de réussite
Irlande du Nord	70
Irlande	65
Pologne	64
Allemagne	62
Angleterre	62
Lituanie	62
Pays-Bas	62
Belgique (Flamande)	59
Danemark	59
Espagne	59
Finlande	58
Portugal	57
Bulgarie	54
Slovénie	54
Chypre	52
Croatie	51
République Tchèque	51
Slovaquie	50
Suède	49
Hongrie	48
Italie	47
<b>France</b>	<b>42</b>

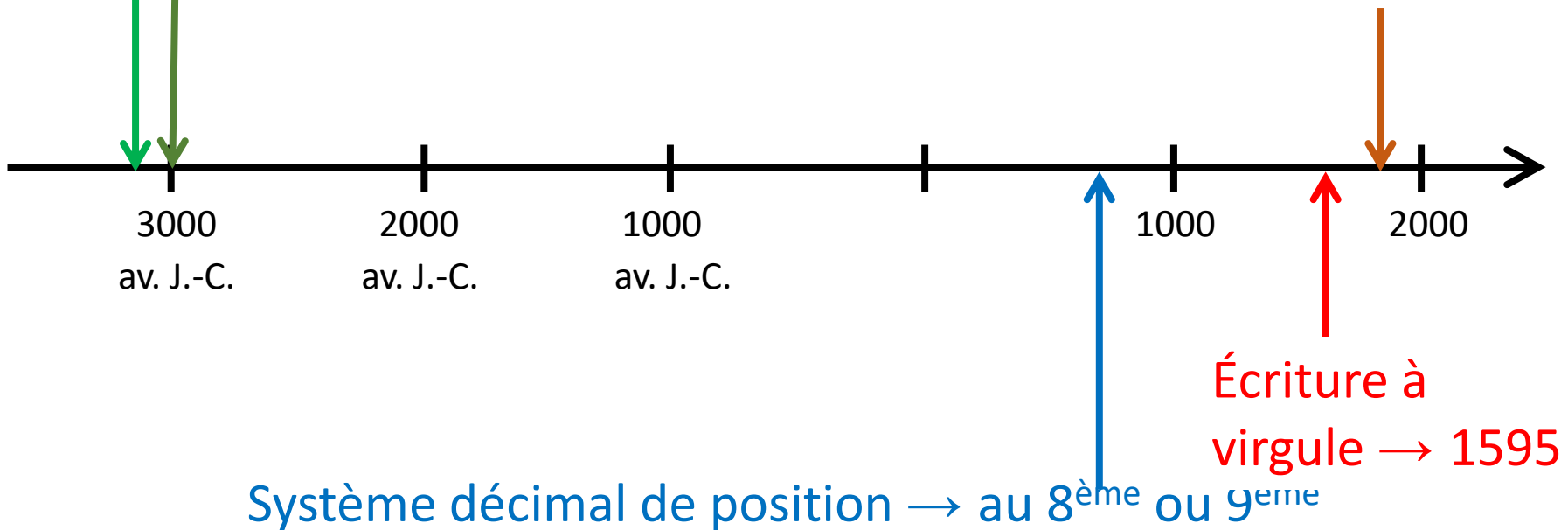
1. Les résultats des élèves
2. Comprendre l'écriture à virgule
3. Calculer pour renforcer la compréhension des décimaux et renforcer la compréhension des décimaux pour mieux calculer

# Une « invention » récente

Système de numération écrite → vers 3200 av. J.-C.

Premières représentations de fractions

Usage officiel du système décimal de position en France → Révolution française



# Qu'est-ce qu'un nombre décimal ?

## ➤ Un nombre qui s'écrit avec une virgule.

- Non.
- $2$  ;  $\frac{5}{2}$  et  $\frac{7}{10}$  sont des nombres décimaux et pourtant ils s'écrivent sans virgule.

## ✓ Un nombre qui peut s'écrire sous forme d'une fraction décimale (un nombre entier au numérateur et une puissance de 10 au dénominateur).

- $7,18$  est un nombre décimal car il peut s'écrire  $\frac{718}{100}$
- $\frac{57}{25}$  est un nombre décimal car il peut s'écrire  $\frac{228}{100}$
- $\frac{1}{3}$  n'est pas un nombre décimal

# Qu'est-ce qu'un nombre décimal ?

- Un nombre qui peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.
  - $\frac{57}{25}$  est un nombre décimal car il peut s'écrire 2,28
  - $\frac{1}{3}$  n'est pas un nombre décimal, son écriture à virgule (elle est unique) 0,3333... ne s'arrête jamais

Le « peut » est important car l'écriture décimale n'est pas unique :

2,28000... a un nombre infini de chiffres après la virgule mais il **peut** aussi s'écrire 2,28 ou 2,280 et c'est donc bien un nombre décimal.



# Des obstacles liés à la nature des ensembles...

Des obstacles liés au passage du travail sur les entiers au cycle 2 au travail sur les décimaux au cycle 3.

Ces ruptures peuvent être liées à la nature des ensembles des entiers et décimaux et ne peuvent donc être évitées :

- Le nombre suivant (successeur) ou le nombre précédent n'a pas de sens sur les décimaux.  
6,13 n'est pas le nombre qui suit 6,12.
- Entre deux nombres décimaux différents on peut toujours trouver un nombre décimal.  
Entre 6,12 et 6,13, il y a 6,124.

# Des obstacles liés à la nature des ensembles...

- La difficulté peut également venir du vocabulaire dixième et centième, que les élèves confondent avec dizaine et centaine.

Exemple d'erreur qui en résulte :  $\frac{7}{10} < \frac{7}{100}$  ,

*« car les dixièmes c'est plus petit que les centièmes ».*

# ... d'autres non

Mais d'autres obstacles sont liés à ce qui est dit, ou aux règles que les élèves se créent au cycle 2.

Par exemple :

Pour *comparer deux nombres*

*s'ils n'ont pas le même nombre de chiffres*

Le *plus grand* est celui qui a *le plus de chiffres.*

$$\begin{array}{ccc} 764 & < & 6\ 565 \\ 3 \text{ chiffres} & & 4 \text{ chiffres} \end{array}$$

✓ «  $764 < 1\ 000$  et  $6\ 565 > 1\ 000$   
donc  $764 < 6\ 565$ . »

Cette règle appliquée  
aux nombres décimaux  
donne :

$$23,2 < 17,183$$

Conception erronée fréquente : la virgule **sépare** la partie entière de la partie décimale, le nombre décimal écrit avec une virgule est perçu comme **deux entiers séparés par une virgule**.

Quelques erreurs fréquentes qui en résultent :

- $1,7 + 2,12 = 3,19$  au lieu de 3,82
- $\frac{1}{4} = 1,4$  au lieu de 0,25
- $3 \times 2,7 = 6,21$  au lieu de 8,1
- $6,32 < 6,173$  car  $32 < 173$  au lieu de  $6,32 > 6,173$  car trois dixièmes est supérieur à un dixième.

# ...d'autres non

Cette conception erronée est encouragée par l'usage social des nombres décimaux :

- dans 7,35 €, la virgule « sépare » les euros et les centimes d'euro et on le lit « 7 euros 35 » ;
- dans 1,73 m, la virgule « sépare » les mètres et les centimètres ;
- dans 3,250 kg, la virgule « sépare » les kilogrammes et les grammes.

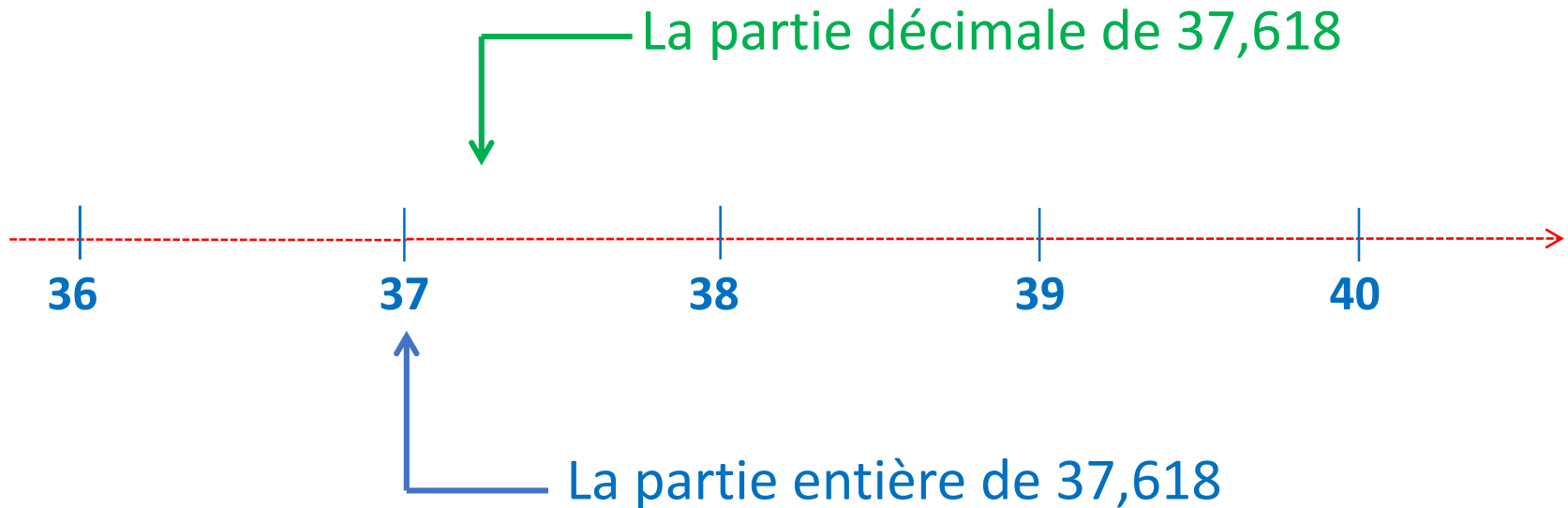
Mais les choses deviennent plus compliquées dès que des calculs sont effectués à la calculatrice :

- $2 \times 7,35 \text{ €} = 14,7 \text{ €}$  → Comment interpréter ce 7 ?
- $2,7 \text{ cm} \div 2 = 1,35 \text{ cm}$  → Comment interpréter ce 35 ?

# Qu'est-ce que la partie décimale ?

➤ « Ce qu'il y a après la virgule »

■ Non.



✓ « C'est ce qui reste quand on a retiré la partie entière »

$$37,618 - 37 = 0,618$$

# ANALYSE 1

Partie entière			Partie décimale		
Centaines	Dizaines	Unités	Dixièmes	Centièmes	Millièmes
	3	7	6	1	8

37,618

Partie entière      Partie décimale

Un nombre décimal est composé d'une partie entière et d'une partie décimale séparées par une virgule

# Qu'est-ce que la partie décimale ?

Partie entière			Partie décimale		
Centaines	Dizaines	Unités	Dixièmes	Centièmes	Millièmes
	3	7	6	1	8

$$37,618 = 37 + 0,618 = 37 + \frac{618}{1000}$$

*Partie entière*      *Partie décimale*

Un nombre décimal peut s'écrire comme la somme de sa partie entière et de sa partie décimale



# Pour mieux comprendre l'écriture à virgule

- ✓ Éviter de faire apparaître la virgule comme un séparateur ; la virgule a été « créée » pour repérer le chiffre des unités dans l'écriture décimale (l'écriture à virgule), pour marquer la fin de la partie entière.

# Pour mieux comprendre l'écriture à virgule

La virgule apparaît souvent comme un axe de symétrie pour les élèves.

Ils écrivent alors **32 unités et 7 centièmes = 32,007**

✓ La symétrie se fait autour des unités :

Pour *comparer* deux nombres

s'ils ont la même partie  
entière, on compare la partie  
décimale

$$6,\underline{32} < 6,\underline{34}$$

car  $32 < 34$

# Comparer des nombres décimaux

Pour comparer **6,32** et **6,317**

✓ Méthode 1

Pour les dixièmes : 3 = 3

Pour les centièmes : 2 > 1

Donc 6,32 > 6,317

$$6,32 = 6 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100} \text{ et } 6,317 = 6 + \frac{3}{10} + \frac{1}{100} + \frac{7}{1000}$$

✓ Méthode 2

$$6,32 = 6,320 \text{ et } \frac{320}{1000} > \frac{317}{1000} \text{ donc } 6,32 > 6,317$$

# Progressions et programmations

Place et répartition des séances consacrées aux Fractions, Fractions décimales et Nombres décimaux dans les manuels.

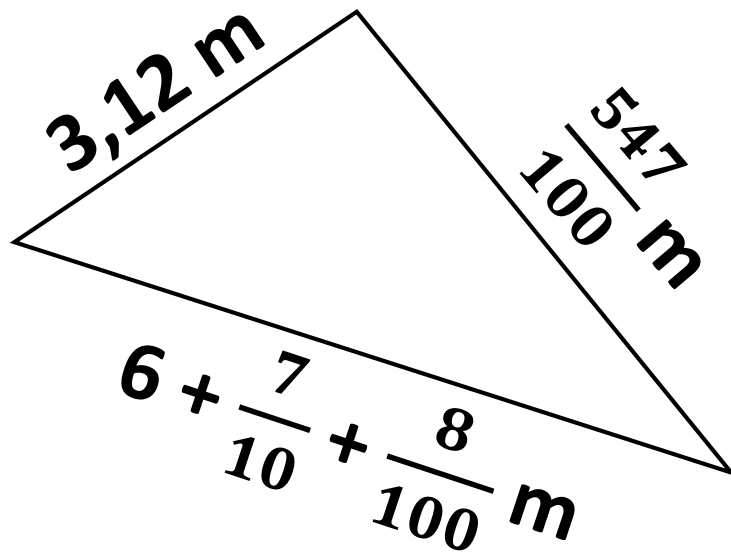
Manuel	Période 1	Période 2	Période 3	Période 4	Période 5
Au rythme des Maths			3	2-1	2

# Progression et programmation

	P1	P2	P3	P4	P5
<b>CM1</b> -> centièmes		Introduction très tôt en CM1 des fractions et des fractions décimales (octobre-novembre).	Introduction de l'écriture à virgule	manierement en parallèle, tout au long du CM1 des écritures sous forme de fractions décimales et des écritures à virgule	
<b>CM2</b> -> millièmes	Reprise des décimaux et de l'écriture à virgule				
<b>6ème</b> -> dix-millièmes		quotient de deux nombres entiers			

# Différentes écritures des décimaux

- ✓ Travailler tout au long du cycle avec les différentes écritures possibles pour les nombres décimaux.



Quel est le périmètre du triangle ?

- 1. Les résultats des élèves**
- 2. Comprendre l'écriture à virgule**
- 3. Calculer pour renforcer la compréhension des décimaux et renforcer la compréhension des décimaux pour mieux calculer**



Faire calculer les élèves permet de :

- repérer les éventuelles conceptions erronées des élèves (à condition de poser les bonnes questions, et pour pouvoir poser les bonnes questions, il faut connaître ces conceptions erronées...);
- renforcer la compréhension de la notion de nombre décimal et de l'écriture à virgule.

# Calculer avec des nombres décimaux

Revenons aux obstacles liés au passage du travail sur les entiers au cycle 2 au travail sur les décimaux au cycle 3.

Pour le calcul aussi, elles peuvent être dues à ce qui est dit, ou aux règles que les élèves se créent au cycle 2.

Par exemple :

$$4,12 + 32,6 = 73,8$$

$$\begin{array}{r} 4,12 \\ + 32,6 \\ \hline 73,8 \end{array}$$

- « Pour additionner deux nombres, il faut les aligner à droite. »
- ✓ « Pour additionner deux nombres il faut aligner les chiffres des unités. »

# Calculer avec des nombres décimaux

Effectuer des calculs permet de renforcer la compréhension de l'écriture à virgule en lui donnant du sens grâce à un oral maîtrisé.

Par exemple :

$$\begin{array}{r} \phantom{1} \phantom{8,} \phantom{7} \\ \phantom{1} \phantom{8,} \phantom{7} \\ + \phantom{1} \phantom{8,} \phantom{7} \\ \hline 2 \phantom{8,} \phantom{7} \phantom{7} \end{array}$$

- ✓ « Pour poser une addition je dois aligner verticalement les chiffres des unités (ou bien, qui correspondent à la même unité de numération). »
- ✓ « 7 dixièmes plus 6 dixièmes font 13 dixièmes, soit 3 dixièmes et 1 unité que je mets en retenue. »

# Calculer avec des nombres décimaux

Autre exemple d'erreur fréquente :

$$17,42 \times 10 = 17,420 \quad \text{ou} \quad 17,42 \times 10 = 170,42$$


- « Pour multiplier par 10, il faut ajouter un zéro


$$456 \times 10 = 4560. \text{ »}$$

- ✓ « Quand on multiplie un nombre par 10, il devient 10 fois plus grand, chacun de ses chiffres prend une valeur 10 fois plus grande, le chiffre des unités devient donc le chiffre des dizaines

$$456 \times 10 = 4560. \text{ »}$$

# Des documents ressources à connaître





Ministère de l'Éducation nationale  
des Hautes Études et de la Recherche

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

NOMBRES ET CALCULS

## Fractions et nombres décimaux au cycle 3

Pour que les élèves comprennent pleinement les données numériques exprimées avec des fractions ou sous forme décimale, et puissent mobiliser ces nombres dans la résolution de problèmes, leur première approche de ces notions est essentielle. Elle doit d'abord s'appuyer sur des activités dans lesquelles le nombre entier montre ses limites ; les activités de calcul, décrochées ou en situation, viennent ensuite appuyer cette construction qui se fait sur toute la durée du cycle 3.

### Introduction

#### Fractions

Lorsqu'on coupe une unité en un nombre entier de parts égales et qu'on prend un nombre entier de ces parts, éventuellement supérieur au nombre de parts contenues dans cette unité, on obtient une fraction.


La fraction  $\frac{2}{3}$  (lire « deux tiers »), rend compte d'un partage de l'unité en trois parts égales puis de la prise de deux de ces parts.


Lorsque le partage de l'unité se fait en un petit nombre de parts (2, 3, 4, ...), et que l'on prend un petit nombre de telles parts, on parle de fraction simple  $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{10}$ , etc.

Lorsque le partage de l'unité se fait en un nombre de parts égal à une puissance de 10 (comme 10, 100, 1000, ...), la fraction obtenue est appelée fraction décimale  $\frac{3}{10}, \frac{547}{100}, \frac{3}{1000}$ , etc.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> La notion de fraction « simple » n'est pas définie de façon précise en mathématiques.  
<sup>2</sup> On rappelle que 1 est également une puissance de 10. En effet,  $1 = 10^0$ . La fraction  $\frac{1}{10}$  est donc également une fraction décimale.

eduscol.education.fr/rassourcas-2016 - Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche - Novembre 2016





Ministère de l'Éducation nationale  
des Hautes Études et de la Recherche

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

## Exemples d'erreurs observées

ERREURS RELEVANT DU TRAITEMENT DES ÉCRITURES À VIRGULE COMME LA JUXTAPOSITION DE DEUX ENTIERS			
Erreurs observées	Explicitation	Points de vigilance au cycle 2	Raisonnements à privilégier et points de vigilance au cycle 3
3,82 > 3,9	L'élève compare les nombres formés par les chiffres après la virgule : 82 > 9 donc 3,82 > 3,9 L'élève peut aussi comparer $\frac{82}{100}$ et $\frac{9}{10}$ en considérant que 82 > 9, sans tenir compte de l'unité dans laquelle il compte (des centièmes dans le premier cas, des dixièmes dans le second)	Le recours systématique aux outils du type tableau de numération peut ne pas favoriser la compréhension de l'aspect décimal de notre système de numération écrite chiffrée, il ne doit donc pas être exclusif de toute autre méthode en début d'apprentissages. Un travail régulier doit être mené sur la composition des écritures chiffrées, les élèves doivent pouvoir identifier et différencier le « chiffre des ... » et « le nombre de ... ». Dans 532 le chiffre des dizaines est 3	3,82 et 3,9 ont la même partie entière, on commence par regarder le chiffre des dixièmes <sup>1</sup> : 8 < 9, donc 3,82 < 3,9. 3,82 c'est 3 unités et 82 centièmes, 3,9 c'est 3 unités et 9 dixièmes, c'est-à-dire 3 unités et 90 centièmes et 90 centièmes est plus grand que 82 centièmes. Il faut privilégier une verbalisation systématique à une technique automatisée conduisant à mettre des 0 pour avoir des nombres de même taille : 3,12 et 3,90, puis comparer 12 et 90, en effet une telle technique tend à renforcer la conception erronée consistant à voir l'écriture à virgule comme l'écriture de deux entiers juxtaposés et séparés par une virgule. On peut aussi revenir à la représentation de 12 centièmes et de 9 dixièmes (droite graduée, carré partagé en 100...) Il est également nécessaire d'être vigilant lorsque l'on parle de <b>partie entière</b> et <b>partie décimale</b> d'un nombre décimal, notamment dans les affichages ou les écrits notés dans les cahiers d'élèves. On voit parfois ces notions (qui ne sont pas une exigence des programmes) introduites dans des tableaux de numération où la partie gauche du tableau est qualifiée de partie entière et la partie droite du tableau

<sup>1</sup> Il est nécessaire d'expliquer aux élèves pourquoi cette méthode fonctionne, pourquoi il suffit de regarder les chiffres des dixièmes si ceux-ci ne sont pas égaux. C'est l'aspect décimal de la numération de position qui est ici particulièrement important.

eduscol.education.fr/rassourcas-2016 - Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche - Novembre 2016